Problème

1. Les inconnues sont z_A, z_B (noté z) et φ. Les 3 variables sont reliées par 2 conditions : l'inextensibilité du fil et la CRSG.
→ 1 seul DDL.

2. Les points du fil ont un mvt de translation, soit rectiligne, soit curviligne.

3. $\vec{V}_{B/R} = \dot{z}\,\vec{e}_z$, $\underbrace{\vec{V}_{J_1/R} = \vec{V}_{B/R} = \dot{z}\,\vec{e}_z \text{ et } \vec{V}_{I_1/R} = -\dot{z}\,\vec{e}_z}$

↳ qd le fil "descend" à droite de la poulie, il "monte" à gauche, d'où signe opposé.

4. $\vec{V}_{M\in \text{poulie}/R} = \vec{V}_{O\in\text{poulie}/R} + \vec{MO}\wedge\vec{\Omega}_{\text{poulie}/R}$
$= \vec{0} + R\vec{e}_r \wedge \dot{\varphi}\,\vec{e}_y = +R\dot{\varphi}\,\vec{e}_t$ où $\vec{e}_t$ = vecteur tangent en M t.q. $(\vec{e}_r, \vec{e}_t, \vec{e}_y)$ = bon$_d$

5. $\vec{V}_{I\in\text{poulie}} = -R\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$ et $\vec{V}_{J\in\text{poulie}/R} = +R\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

6. CRSG en I : $\vec{V}_{I\in\text{poulie}} = \vec{V}_{I_1\in\text{fil}/R} \Rightarrow -\dot{z}\,\vec{e}_z = -R\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$
d'où : $\boxed{\dot{z} = R\dot{\varphi}}$

CRSG en J : $\vec{V}_{J\in\text{poulie}/R} = \vec{V}_{(J_1\in \text{fil}/R)} \Rightarrow R\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = \dot{z}\,\vec{e}_z$
soit encore : $\dot{z} = R\dot{\varphi}$

en intégrant, on trouve : $\boxed{z = R\varphi + \underline{cte}}$

7. $z_A + z_B + \frac{2\pi R}{2} = L \rightarrow \boxed{z_A = L - \pi R - z = -z + \underline{cte}}$

8. $\mathcal{E}_k(A) = \frac{1}{2} m \dot{z}_A^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$

$\mathcal{E}_k(B) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2$

$\mathcal{E}_k(\text{poulie}) = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_\Delta \frac{\dot{z}^2}{R^2}$

d'où $\mathcal{E}_k(\text{système}) = \frac{1}{2}\left(m + M + \frac{I_\Delta}{R^2}\right)\dot{z}^2$

9. $\mathcal{E}_p(A) = -m\vec{g}\cdot\int d\vec{OA} = -mg\vec{e_z}\cdot\int dz_A\cdot\vec{e_z} = -mgz_A + \underline{cte}$

$\rightarrow \mathcal{E}_p(A) = +mgz + C_1$

$\mathcal{E}_p(B) = -M\vec{g}\cdot\int d\vec{OB} = -Mg\vec{e_z}\int dz\cdot\vec{e_z} = -Mgz + C_2$

$\mathcal{E}_p(\text{poulie}) = -M\vec{g}\cdot\vec{OO} + \underline{cte} = 0 + \underline{cte} = C_3$

d'où $\boxed{\mathcal{E}_p(\text{système}) = -(M-m)gz + \underline{cte}}$

10. Th de l'énergie mécanique : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$ ou $d\mathcal{E}_m = \delta W^{nc}$

avec $\mathcal{P}^{nc}$ = | puissance
δW^{nc} | Travail
des Forces non conservatives.

Ds ce pb, les fces non conservatives = actions de contact de la poulie par rapport à son axe de rotation ; si liaison parfaite $\Rightarrow \mathcal{P}^{nc} = 0$.

d'où avec $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\left(m + M + \frac{I_\Delta}{R^2}\right)\dot{z}^2 - (M-m)gz + \underline{cte}$

$\rightarrow \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow \left(m + M + \frac{I_\Delta}{R^2}\right)\dot{z}\ddot{z} - (M-m)g\dot{z} = 0$

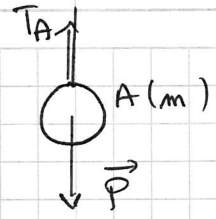
soit $\boxed{\ddot{z} = \frac{M-m}{\left(m + M + \frac{I_\Delta}{R^2}\right)}g}$

11. Mouvement unif^{nt} accéléré. Ici $\ddot{z} \neq g \Rightarrow$ on peut observer des mvts quantitativ^{nt} $\neq$ de la chute des corps sous l'action de la pesanteur. Tout se passe c̄ si on modifiait g.

12. <u>AN</u> : $\ddot{z} = \frac{200.10^{-3}}{400.10^{-3} + \frac{8.10^{-6}}{(\text{[illegible]}\,10^{-2})^2}}g = \frac{200.10^{-3}}{400.10^{-3} + 2.10^{-2}}g$

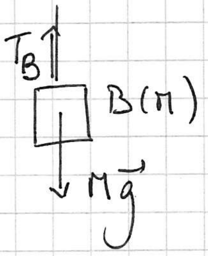
$= \frac{2}{4+0{,}2}\cdot g \simeq \frac{1}{2}g$

13. <u>Th. du centre de masse pour A</u> :



$$\vec{P}_A + \vec{T}_A = m\ddot{\vec{z}}_A \rightarrow \boxed{mg + T_A = m\ddot{z}_A} \ (1)$$

14. <u>Th. appliqué en B</u> :



⚠ T_A et T_B sont algébriques

$$\vec{P}_B + \vec{T}_B = \cdot \ \ddot{\vec{z}}_B$$

$$\rightarrow \boxed{Mg + T_B = M\ddot{z}} \ (2)$$

15. <u>TMC pour la poulie</u> : on l'applique en O car symétrique et pt fixe

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}_O(\text{poulie})}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ex} = \vec{OJ} \wedge \vec{T}_{\rightarrow \text{poulie en B}} + \vec{OI} \wedge \vec{T}_{\rightarrow \text{poulie en A}}$$

avec $\vec{T}_{\text{fil} \rightarrow \text{poulie en B}} = -\vec{T}_B$

$T_{\text{fil} \rightarrow \text{poulie en A}} = -\vec{T}_A$

d'où avec $\vec{L}_O = I_\Delta \dot{\varphi} \vec{e}_y \Rightarrow d\vec{L}_O/dt = I_\Delta \ddot{\varphi} \vec{e}_y$

et $\vec{\mathcal{M}}_O^{ex} = -R\vec{e}_x \wedge -\vec{T}_B + R\vec{e}_x \wedge -\vec{T}_A$

$$= -R\vec{e}_x \wedge -T_B \vec{e}_z + R\vec{e}_x \wedge -T_A \vec{e}_z$$

$$= (-RT_B + RT_A)\vec{e}_y$$

donc : $\boxed{R(T_A - T_B) = I_\Delta \ddot{\varphi}}$ (3)

On a donc avec (1) $\Rightarrow mg + T_A = m\ddot{z}_A = -m\ddot{z}$

(2) $\Rightarrow Mg + T_B = M\ddot{z}$

soit $mg - Mg + T_A - T_B = -(m+M)\ddot{z}$

avec (3) : $mg - Mg + \frac{I_\Delta}{R}\ddot{\varphi} = -(m+M)\ddot{z}$

d'où : $\ddot{z} = \frac{(M-m)}{m+M} g - \frac{I_\Delta}{R} \frac{\ddot{\varphi}}{m+M}$ avec $\dot{\varphi} = \dot{z}/R$

$$\ddot{z} = \frac{M-m}{M+m} g - \frac{I_\Delta}{R^2} \frac{1}{m+M} \ddot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{M-m}{M+m\left(1 + \frac{I_\Delta}{R^2}\frac{1}{m+M}\right)} g = \frac{M-m}{M+m+\frac{I_\Delta}{R^2}} g$$